




Radio máximo de la zona saturada en superficie bajo riego por goteo a caudal constante. Modelos analítico y empírico

Maximum saturated radius under drip irrigation at constant applied flow rate. Analytical and empirical model

Ángel del Vigo ^{a*}, Sergio Zubelzu ^{b1}, Luis Juana ^{b2}

^aInstituto CAI-Lab, Facultad de Tecnología y Ciencia, Universidad Camilo José Cela. Calle Almagro 5, 28010. Madrid (España).

^bETSI Agronómica, Alimentaria y de Biosistemas, Universidad Politécnica de Madrid. Av. Puerta de Hierro 2. 28040 Madrid (España).

E-mail: ^aangel.delvigo@ucjc.edu, ^{b1}sergio.zubelzu@upm.es, ^{b2}luis.juana@upm.es

*Autor para correspondencia

Recibido: 03/03/2023

Aceptado: 12/04/2023

Publicado: 30/04/2023

Citar como: del Vigo, Á., Zubelzu, S., Juana, L. 2023. Maximum saturated radius under drip irrigation at constant applied flow rate. Analytical and empirical model. *Ingeniería del agua*, 27(2), 111-124. <https://doi.org/10.4995/la.2023.19328>

RESUMEN

En publicaciones previas se presentó un modelo numérico con capacidad para estudiar patrones de filtración bajo condiciones de riego por goteo. Las pruebas realizadas concluyeron que el modelo es robusto y eficiente con independencia de las características del suelo. Paralelamente, se presentó un modelo analítico simplificado para condiciones de contorno asumibles en el riego por goteo superficial, que describe la evolución del bulbo con el tiempo y en función del caudal aplicado, en base a cuatro parámetros del suelo: conductividad hidráulica en saturación, tensión en el frente, y los contenidos de humedad inicial y en saturación del suelo. A partir de simulaciones para suelos caracterizados con funciones del tipo Gardner, Clapp y Hornberger y van Genuchten-Mualem, se ha obtenido un conjunto de tres ecuaciones empíricas que describen el radio máximo de la zona saturada en superficie, a caudal aplicado constante, para cada uno de estos tres esquemas de caracterización. A través del modelo analítico simplificado se ha llegado a una expresión en régimen estacionario que relaciona el radio máximo de la zona saturada con el caudal aplicado y los parámetros del suelo. En este trabajo se presentan las ecuaciones empíricas obtenidas por simulación, y el modelo analítico simplificado, así como una comparativa de estos dos modelos con el modelo analítico de Wooding, el cual, describe las mismas características del riego.

Palabras clave | flujo de agua; simulaciones; tamaño del bulbo; diseño de riegos.

ABSTRACT

A numerical model able to study filtration patterns under drip irrigation conditions was presented in previous papers. The tests concluded that, the model is robust and efficient regardless of the soil characteristics. At the same time, a simplified analytical model was presented for superficial drip irrigation boundary conditions, which describes, the evolution of the bulb over the time as a function of the applied flow rate. This model is based on four soil parameters: saturated hydraulic conductivity, suction matric head at the wetting front, and the initial and saturated soil moisture contents. Simulations for soils characterized with functions type, Gardner, Clapp and Hornberger and van Genuchten-Mualem, were performed to get the maximum saturated radius on the surface at constant applied flow, for each of these three characterization schemes. Then, a set of three empirical equations has been obtained. Moreover, via the simplified analytical model, an expression in steady regime has been reached for the maximum saturated radius zone as a function of the applied flow rate and soil parameters. This paper presents the set of empirical equations obtained by simulation, and the simplified analytical model, as well as a comparison of these two models with the Wooding analytical model, which describes the same irrigation characteristics.

Key words | water flow; simulations; bulb size; trickle irrigation design.

INTRODUCCIÓN

Conocer la evolución y límites del bulbo en riego por goteo es un aspecto fundamental para el diseño y programación de los sistemas de riego. Cuando no existe información suficiente como para caracterizar convenientemente el suelo, los modelos empíricos para la evolución temporal del bulbo se muestran como una alternativa de sencilla utilización, y poca complejidad matemática, a los modelos analíticos o numéricos de base física.

La mayor parte de los modelos empíricos existentes relacionan el radio del bulbo en superficie, y su alcance en profundidad con el caudal aplicado y el tiempo, teniendo en cuenta algún parámetro del suelo de sencilla obtención experimental, como puede ser la conductividad hidráulica en saturación, o los contenidos de humedad inicial y en saturación del suelo. Algunos ejemplos de modelos empíricos con estas características son Schwartzman y Zur (1986), Amin y Ekhmaj (2006), o Keyvan y Peters (2011). El radio del frente de avance en superficie que describen estos modelos aumenta con el tiempo (o volumen aplicado), lo que es una evidencia experimental cuando el tiempo de riego no es muy elevado. Sin embargo, si la aplicación de agua no se interrumpe y el caudal aplicado en el riego por goteo se mantiene constante, el radio del bulbo en superficie tiende a estabilizarse a un valor límite (máximo) debido al aumento del área de infiltración en superficie. En este contexto, se alcanza un régimen estacionario para la zona saturada en superficie, debido a que, el caudal aplicado se iguala al caudal infiltrado a través del suelo. Esta importante característica del riego por goteo no la tienen en cuenta los modelos empíricos antes mencionados, y tampoco, otros modelos analíticos de base física que describen la evolución temporal del bulbo, como pueden ser los modelos de Roth (1974), Ben Asher *et al.* (1986), Chu (1994), o más recientemente, del Vigo *et al.* (2021), según los cuales, el radio del frente de avance aumenta de forma ilimitada en el tiempo.

Sin embargo, Wooding (1968) estableció un modelo analítico a partir de la ecuación de la filtración (Richards, 1931) en régimen estacionario, para suelos caracterizados por funciones del tipo Gardner (1958), cuya solución, tras un elaborado desarrollo en el que utilizó, en primer lugar, la transformada de Kirchhoff para linealizar la ecuación diferencial, y después, la transformada de Hankel para su resolución, dio lugar a un resultado en forma de serie infinita, que tiende a la siguiente expresión simplificada de tan solo dos términos:

$$q = \frac{4k_s}{\alpha} R_0 + \pi k_s R_0^2 \quad (1)$$

Donde k_s [cm/min] es la conductividad hidráulica en saturación del suelo, α [cm⁻¹] es un parámetro del suelo conocido como constante de capilaridad macroscópica, q [cm³/min] es el caudal aplicado y R_0 [cm] es el radio máximo que adquiere la zona saturada en superficie al alcanzar el estado estacionario. El primer término de esta ecuación representa el potencial capilar de la propia succión del medio. El segundo término está relacionado con el potencial gravitatorio bajo la fuente. Notar que, cuanto más grande es el radio de la zona saturada mayor es el efecto gravitatorio frente al de succión.

La limitación del modelo de Wooding, al igual que el de otros modelos analíticos posteriores de filtración como son Raats (1971) o Warrick (1974), reside en considerar una expresión exponencial para la conductividad hidráulica frente al potencial matricial del suelo asociada al parámetro α (función del tipo Gardner), lo que permite resolver analíticamente la ecuación de la filtración, pero que no se ajusta a la realidad de la mayor parte de los suelos. De hecho, algunos autores (Pullan y Collins, 1987; Weir, 1987; Warrick, 1992), han reportado un pobre ajuste del modelo de Wooding con respecto a soluciones numéricas propias para casos en los que el radio saturado en superficie es pequeño, bien porque el suelo es arenoso, o también, si el caudal aplicado es muy bajo.

En este sentido, es conveniente seguir avanzando en el estudio del límite del bulbo en superficie al alcanzar su régimen estacionario, ya que, este es un aspecto fundamental para elegir la separación de los goteros en cultivos en los que se suministra agua a caudal aplicado constante.

En publicaciones previas (del Vigo *et al.*, 2019c; del Vigo *et al.*, 2021) se ha presentado un modelo analítico simplificado, que fue derivado desde la ecuación de Darcy y asumiendo hipótesis del tipo Green-Ampt, para una fuente saturada y circular en superficie. Asumiendo el efecto de la gravedad, y cuando el tiempo de riego tiende a infinito se ha alcanzado la siguiente expresión que relaciona el caudal aplicado (q) con el radio de la fuente saturada (R_0):

$$q = \frac{\sqrt{2\pi}k_s}{\alpha} R_0 + 2\sqrt{2\pi} \Delta \theta k_s R_0^2 \quad (2)$$

Siendo $\Delta\theta$ [cm³/cm³] la diferencia entre el contenido de humedad en saturación e inicial del suelo. Recordar que en un modelo basado en hipótesis del tipo Green-Ampt, el contenido de humedad en el interior del bulbo se considera igual al de saturación del suelo para todos los puntos. Al igual que en el modelo de Wooding, el primer término de esta ecuación está asociado a la filtración por succión o capilaridad del suelo, mientras que el segundo término es relativo a la filtración por efecto gravitatorio.

En este artículo se presenta un grupo de ecuaciones empíricas, que se han obtenido a través de resultados de simulación, y que relacionan el radio límite de la zona saturada en superficie bajo riego por goteo a caudal constante con la conductividad hidráulica en saturación y la diferencia entre los contenidos de humedad inicial y de saturación del suelo. El modelo numérico, que ha sido validado y presentado en publicaciones previas (del Vigo *et al.*, 2019a; del Vigo *et al.*, 2019b; del Vigo *et al.*, 2020; del Vigo, 2020) se ha utilizado con tres tipos de funciones de caracterización del suelo distintas, que son: Gardner (1958), Clapp y Hornberger (1978) y van Genuchten-Mualem (1976-1980), con objeto de comparar los resultados obtenidos en cada caso. Al final del artículo se presenta una comparativa entre estos tres modelos empíricos inferidos por simulación, y los modelos analíticos de Wooding (1968), y del Vigo *et al.* (2021), que describen las ecuaciones (1) y (2), para el radio límite de la zona saturada en superficie al alcanzar su régimen estacionario.

MATERIALES Y MÉTODOS

Modelo de simulación

Se desarrolló un código en MATLAB para el estudio de la filtración de agua a través de la ecuación de Richards. El código fue ampliamente validado (del Vigo *et al.*, 2020, del Vigo, 2020) por comparación con soluciones analíticas conocidas (Warrick, 1974; Warrick y Lomen, 1976), el programa HYDRUS (Šimůnek *et al.*, 2006) y ensayos experimentales. Por la simetría del sistema (infiltración desde una fuente de caudal conocido en superficie) el modelo de integración utiliza un sistema de coordenadas cilíndricas (r, z) para la resolución numérica de las ecuaciones¹, lo que permite reducir el número de variables espaciales y, por tanto, el tiempo de computación. La ecuación de Richards en 3-D, en términos del potencial matricial $h(\theta)$ [cm], conductividad hidráulica $k(\theta)$ [cm/min] y el contenido de humedad θ [cm³/cm³], expresada en este sistema de coordenadas y del tiempo t [min], es:

$$\frac{k}{r} \frac{\partial h}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left[k \frac{\partial h}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[k \frac{\partial h}{\partial z} \right] + \frac{\partial k}{\partial z} = \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial \theta}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial t} \quad (3)$$

Para la que se propuso la siguiente discretización:

$$h_{t+\Delta t} = h + \frac{\Delta t \Delta h}{2 \Delta \theta} \left[\frac{k}{r} \frac{h_2 - h_4}{\Delta r} + \frac{(k + k_1)(h_1 - h)}{(\Delta z)^2} + \frac{(k + k_2)(h_2 - h)}{(\Delta r)^2} + \frac{(k + k_3)(h_3 - h)}{(\Delta z)^2} + \frac{(k + k_4)(h_4 - h)}{(\Delta r)^2} + \frac{k_1 - k_3}{\Delta z} \right] \quad (4)$$

Donde se ha utilizado la media aritmética de la conductividad hidráulica sobre un entorno de cada nodo de la red. Se comprobó que el programa es estable numéricamente bajo la siguiente condición de resolución espacio-temporal, que fue derivada a partir de argumentos matemáticos discutidos en la bibliografía (Carnahan, 1979):

$$\Delta t < \frac{\theta_s \cdot \Delta z^2}{8000k_s} \quad (5)$$

Donde k_s y θ_s son, respectivamente, la conductividad hidráulica y el contenido de humedad en saturación del suelo. El código permite, por tanto, introducir la función de caracterización del suelo $k(h)$ que se necesite en cada caso.

Para estudiar la evolución de la zona saturada sobre el suelo, se desarrolló un código con capacidad para definir condiciones de contorno variables en el tiempo sobre la superficie. Observar que, si el caudal aplicado es mayor que el infiltrado el agua se acumula en la superficie, expandiéndose con simetría radial sobre el medio isótropo. La altura que adquiere el agua acumulada

¹ Estando el gotero en el origen del sistema de referencia, la coordenada r representa la distancia de cualquier punto sobre la dirección radial, mientras que la coordenada z es la cota del punto sobre el eje vertical.

depende de su tensión superficial y la rugosidad del suelo. Esta altura se ha introducido como un parámetro de entrada en el código (z_r). En las simulaciones que se presentan en este artículo se ha estimado para esta altura un valor igual a $z_r=0.5$ cm. En expresiones empíricas como las familias de infiltración del NRCS, se considera un valor de 0.7 cm para la altura del charco sobre una superficie plana y regular. Aunque este parámetro puede crecer en función de la rugosidad del suelo.

Por tanto, cuando el caudal aplicado es mayor que el infiltrado, el agua acumulada en superficie ocupa un volumen cilíndrico de altura $z < z_r$, y radio creciente en el tiempo $R_0(t)$. Esto se implementó en el código definiendo las siguientes condiciones de contorno:

1. Evolución de la fuente en superficie, ($r \leq R_0(t)$, $z=0$). Condiciones de saturación bajo presión $h \cong z_r$.
2. Resto de superficie: ($r > R_0(t)$, $z=0$). Condiciones iniciales y velocidad vertical nula.

Siendo el radio de la zona saturada una función del tiempo, se puede relacionar con el volumen neto $V_n(t)$ de agua [cm³] que se acumula bajo el gotero. Observar que, el volumen neto acumulado es la diferencia entre el volumen aplicado por el gotero e infiltrado a través del suelo, es decir, $V_n(t) = V_a - V_i$; estos son datos conocidos para cada iteración en el proceso de integración numérica. En este contexto, el radio del charco es una función de valores discretos restringidos (r_i) a la resolución espacial de la red de nodos ($R_0(t) = r_i$); cada vez que el volumen acumulado en superficie supera al cilindro de radio r_i , es decir, si $V_n(t) > \pi z_r r_i^2$, el radio de la fuente crece un valor igual a la resolución espacial sobre la dirección radial $R_0(t) = r_i + \Delta r$. Esta acción es recurrente. Este método es aplicable a sistemas de caudal constante o variable en el tiempo, siempre que la función $q(t)$ sea conocida. Para más detalles sobre las condiciones de contorno, estructura del código y su validación se puede consultar la bibliografía² (del Vigo, 2020).

Modelo analítico simplificado

Se ha desarrollado un modelo analítico en tres dimensiones a partir de la ecuación de Darcy y considerando hipótesis del tipo Green-Ampt que describe el volumen y caudal infiltrado desde un emisor superficial semiesférico de radio constante (R_0), llegando a la siguiente expresión implícita para la evolución del frente de avance del bulbo ($r_f(t)$) en función del tiempo:

$$t = \frac{\Delta\theta}{k_s \tau_f R_0} \left[\frac{1}{3} (r_f^3(t) - R_0^3) - \frac{R_0}{2} (r_f^2(t) - R_0^2) \right] \quad (6)$$

Siendo τ_f [cm] la tensión en el frente de avance del bulbo, un parámetro típico de los modelos basados en hipótesis de Green-Ampt que se puede calcular por integración de la función conductividad hidráulica (Neuman, 1976) a través de la siguiente ecuación:

$$\tau_f = \frac{1}{k_s} \int_{h(\theta_0)}^0 k(h) dh \quad (7)$$

El resto de parámetros que aparecen en la ecuación (6) se han definido con anterioridad. A través de argumentos de base física y análisis dimensional el modelo se ha extendido para el estudio del volumen y caudal infiltrado desde un disco saturado en superficie de radio constante (R_0), dando lugar a la siguiente ecuación para el caudal aplicado desde el disco sobre tiempos muy largos de riego (cuando el tiempo tiende a infinito):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q(t) = \sqrt{2\pi R_0 k_s \tau_f} \left(1 + \frac{2\Delta\theta R_0}{\tau_f} \right) \quad (8)$$

Se puede consultar todo el desarrollo, las condiciones de contorno y las hipótesis asumidas, en la bibliografía (del Vigo et al., 2019c; del Vigo et al., 2021), así como, la validación de este modelo analítico simplificado por comparación con resultados de simulación, que fueron obtenidos con el modelo numérico mencionado en el apartado anterior.

² También se podrá encontrar una versión completa del código en formato editor de texto.

Utilizando la aproximación $\tau_f \cong \alpha^{-1}$, se llega al resultado que muestra la ecuación (2) de este artículo. Observar que, esta aproximación se convierte en igualdad, si se considera que el suelo se puede caracterizar bajo la función conductividad del tipo Gardner:

$$k(h) = k_s \exp(\alpha h(\theta)) \quad (9)$$

Combinando las ecuaciones (7) y (9), se llega a la igualdad propuesta³ $\tau_f = \alpha^{-1}$.

La ecuación (8) representa una situación de régimen estacionario en la que el caudal infiltrado a través de la superficie, desde un disco saturado de radio R_0 , se convierte en una cantidad de valor constante. Utilizando las siguientes escalas, se puede escribir esta ecuación en forma adimensional:

$$c_g = 1 + \frac{2 \Delta \theta R_0}{\tau_f}; \quad V_{ref} = \frac{\sqrt{2}}{3c_g} \pi \Delta \theta R_0^3; \quad q_{ref} = \sqrt{2} \pi R_0 \tau_f k_s \cdot c_g; \quad t_{ref} = \frac{V_{ref}}{q_{ref}} \quad (\text{REF. 1})$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q^* = 1 \quad (8.\text{bis})$$

Donde V_{ref} , q_{ref} y t_{ref} representan tres constantes con unidades de volumen, caudal y tiempo, respectivamente, que se han definido a través de los parámetros del suelo y las condiciones de contorno propias del sistema mencionadas anteriormente, con objeto de adimensionalizar las ecuaciones y realizar un estudio sistemático del sistema. Por su parte, c_g es una constante adimensional asociada al efecto gravitatorio sobre el flujo en este sistema. La variable q^* representa el caudal adimensional en la ecuación (8bis). Para más información sobre el proceso de adimensionalización y obtención de las ecuaciones (8) y (8bis) se puede consultar la bibliografía (del Vigo *et al.*, 2021).

RESULTADOS

La Figura 1 representa resultados obtenidos a través de simulación para el radio máximo de la zona saturada en superficie (una vez alcanzado el régimen estacionario) en situación de riego por goteo superficial, aplicado desde una fuente puntual, a caudal constante. Se han utilizado tres caudales distintos de riego ($q=2,4,8$ L/h). Esta figura muestra los resultados clasificados por el tipo de función de caracterización que se ha utilizado en cada suelo, representando, en todos los casos, el radio límite (o máximo) de la zona saturada en superficie (R_0) frente al coeficiente $\sqrt{q/k_s \Delta \theta}$ que tiene unidad de longitud. Los suelos que se han utilizado en las simulaciones fueron caracterizados por alguna de las siguientes tres funciones de referencia: Gardner, Clapp y Hornberger, o van Genuchten-Mualem. Todos estos suelos se introducen en la Tabla 1. En la última columna de esta tabla, se muestra el tiempo en días (t_{max}) necesario, en cada caso, y según la simulación, para alcanzar el radio máximo de la zona saturada en superficie (o régimen estacionario) para una situación de caudal máximo aplicado $q=8$ L/h. Téngase en cuenta que, este modelo numérico de simulación no tiene en consideración factores externos que pueden afectar a la evolución de la zona saturada en superficie, y por tanto, también a su radio máximo, como pueden ser, la radiación solar, temperatura ambiente, y otras condiciones atmosféricas cambiantes a lo largo del día, que están ligadas a la evapotranspiración.

Conviene advertir que, a lo largo de este artículo, se habla indistintamente de zona saturada como de charco superficial, ya que, si bien es cierto que no son necesariamente el mismo concepto, debe existir agua acumulada sobre la superficie (para una altura $z < z_r$) según las condiciones de contorno que se han expuesto en el epígrafe anterior, para que exista una evolución del radio saturado en superficie.

A modo de ejemplo, la Figura 2 muestra dos casos, entre todas las simulaciones llevadas a término, de la evolución del radio de la zona saturada en superficie hasta alcanzar su radio máximo (o régimen estacionario) frente al tiempo. En todas las

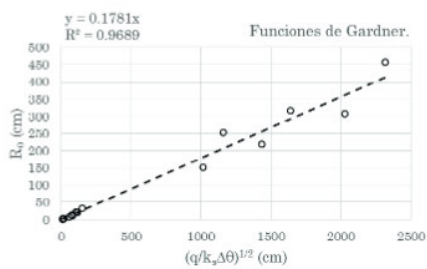
³ En el caso en que $e^{\alpha h_0}$ sea lo suficientemente pequeño; lo cual, es asumible ya que en la mayoría de los casos h_0 es un valor negativo de valor absoluto muy grande.

simulaciones se ha utilizado un criterio, por el cual se establece que, el régimen estacionario (o asintótico) para el radio de la zona saturada se alcanza cuando este valor permanece constante durante al menos el 30% del tiempo total de simulación.

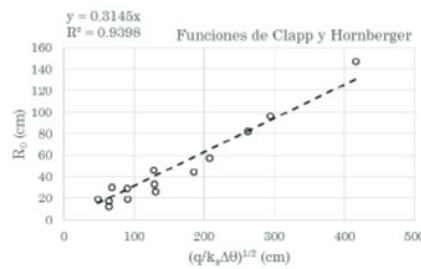
Se observa una tendencia lineal entre las dos magnitudes que representa la Figura 1, con una muy alta correlación, para los tres grupos de caracterización de suelos. La Tabla 3, muestra el valor estimado de la pendiente, junto con su error ($\gamma \pm \Delta\gamma$), que es un parámetro empírico adimensional, para cada una de estas tres gráficas. La expresión analítica de este ajuste está definida, en el siguiente epígrafe, a través de la ecuación (10).

Tabla 1 | Tipos de suelo, y catálogo, utilizados en las simulaciones. En la última columna se muestra el tiempo de riego necesario (según la simulación) para alcanzar el radio máximo de la zona saturada en superficie, para un caudal aplicado de $q=8L/h$.

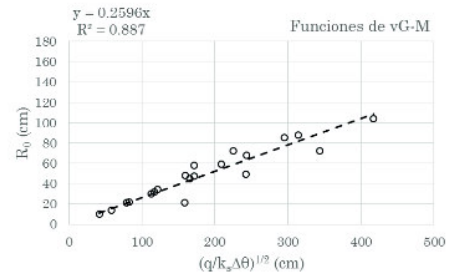
Función de caracterización (Catálogo)	Suelo	t_{max} [días]
Gardner (Mualem, 1976)	Oso Flaco fine sand	1.25
	Touched silt loam	1.25
	Gilat loam (Bresler, 1978)	1
	Sheluhot silty clay	20
	Bet Netofa clay	20
Clapp y Hornberger (Clapp y Hornberger, 1978)	Sandy Loam	0.17
	Silt Loam	0.5
	Loam	0.83
	Clay Loam	4
	Silty Clay	6
Van Genuchten y Mualem (Carsel y Parrish, 1988)	Sandy Loam	0.5
	Sandy Clay Loam	0.5
	Loam	1
	Silt Loam	1.4
	Clay Loam	1.4
	Silt	1.4
	Clay	1.4
	Silty Clay Loam	2
Silty Clay	4	



(a)



(b)



(c)

Figura 1 | Resultados de las simulaciones llevadas a término, clasificados por catálogos: (a) Mualem (1976), (b) Clapp y Hornberger (1978) y (c) Carsel y Parrish (1988). Se muestra el radio límite de la zona saturada bajo el gotero, para riego a caudal constante de 2L/h, 4L/h y 8L/h.

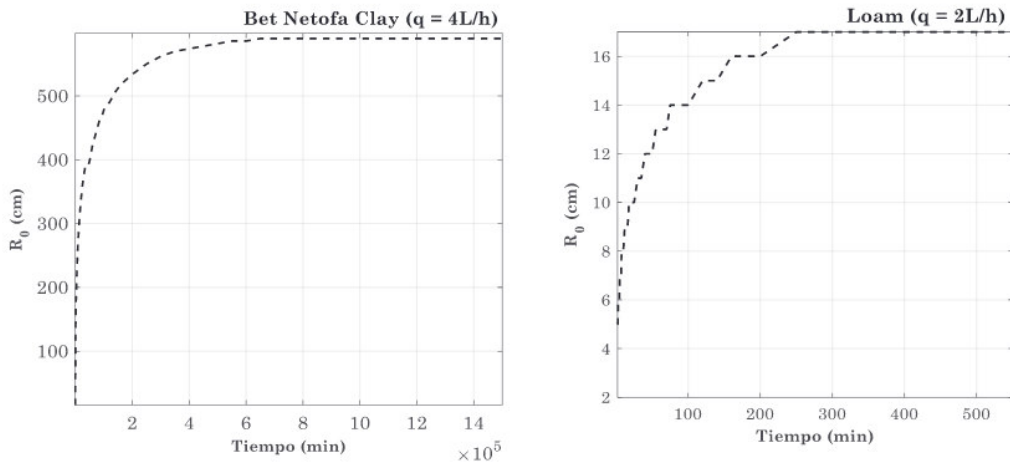


Figura 2 | Ejemplos de simulación. Evolución del radio máximo en función del tiempo para dos suelos de los catálogos de Mualem (izquierda) y Clapp-Hornberger (derecha). Se ha considerado que se alcanza el radio máximo (régimen estacionario) cuando este parámetro permanece constante durante al menos el 30% del tiempo total de simulación.

DISCUSIÓN

Justificación del modelo empírico

De las simulaciones realizadas se extrajeron algunas conclusiones generales con respecto a la evolución del radio de la zona saturada en superficie (charco), y su valor límite, que son comunes a los tres catálogos: (a) el radio de la zona saturada avanza más rápido para los suelos (arcillosos) en los que el producto $k_s \Delta \theta$ es más pequeño, (b) el radio límite es mayor, y se alcanza más tarde, para los suelos (de carácter arcilloso) en los que $k_s \Delta \theta$ es pequeño, (c) el contenido de humedad inicial afecta a la evolución de la zona saturada, de modo que, a mayor contenido de humedad inicial más rápido crece el charco (zona saturada), alcanzando un mayor tamaño, (d) la representación del radio límite (R_0) frente al producto $k_s \Delta \theta$, sigue una tendencia $(k_s \Delta \theta)^\delta$ para todos los tipos de suelo de un mismo catálogo, siendo δ un parámetro adimensional muy próximo al valor $\delta \cong -1/2$ en los tres catálogos, y con independencia del caudal aplicado (ver Figura 3) y (e) se ha comprobado que el caudal aplicado influye en el radio máximo como una función raíz cuadrada para los suelos estudiados de los tres catálogos.

En la siguiente figura se muestran los resultados obtenidos por simulación para el radio máximo (R_0) frente al factor $k_s \Delta \theta$ para un caudal aplicado de 4 L/h sobre todos los suelos estudiados (Tabla 1). Se puede advertir una tendencia en forma de función potencia, tal que R_0 , es proporcional a $(k_s \Delta \theta)^\delta$, siendo el exponente un parámetro adimensional de valor cercano a $\delta \cong -1/2$ en los tres casos.

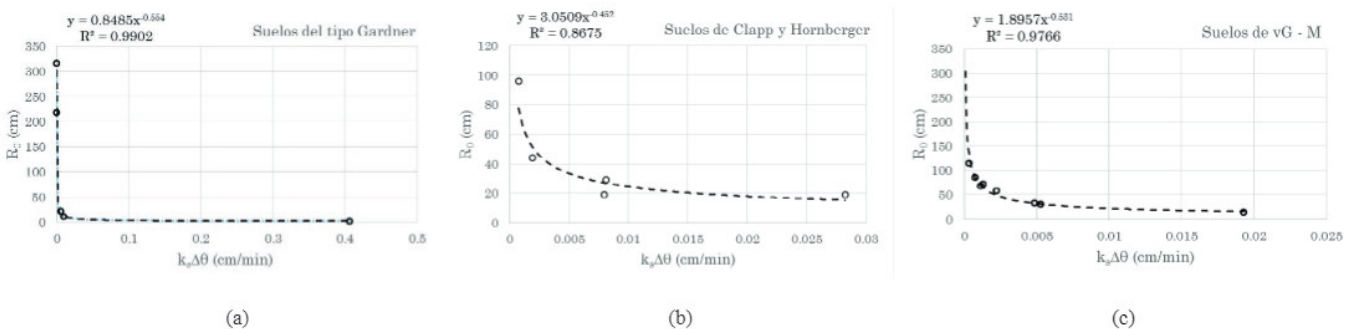


Figura 3 | Ejemplo de ajuste a una función potencia del radio máximo alcanzado en simulación frente al parámetro $k_s \Delta \theta$, para un caudal aplicado de 4 L/h. Suelos de los catálogos: (a) Mualem (1976), (b) Clapp y Hornberger (1978) y (c) Carsel y Parrish (1988). El exponente de la función potencia es en los tres casos es muy próximo al valor adimensional $\delta \cong -1/2$.

En la Tabla 2, se muestran todos los valores obtenidos para el exponente δ , a través del ajuste empírico, para los tres caudales analizados: $q=2,4,8$ L/h. Se observa una desviación máxima del valor propuesto ($\delta=-1/2$) igual a 0.069, en el caso de los suelos del tipo Gardner, para un caudal aplicado de 2L/h. La desviación promedio, en valor absoluto, de los valores obtenidos para este coeficiente respecto al valor propuesto es de tan solo de 0.042, esto es, aproximadamente un 8.5%. De modo que, una tendencia para el radio límite aproximadamente igual a $(k_s \Delta \theta)^{-1/2}$ queda justificada.

Tabla 2 | Valor del parámetro δ para el ajuste R_0 frente a $(k_s \Delta \theta)^\delta$ los suelos estudiados de los tres catálogos.

Caudal aplicado	Gardner	Clapp y Hornberger	Van Genuchten - Mualem
2 L/h	-0.569	-0.454	-0.540
4 L/h	-0.554	-0.452	-0.531
8 L/h	-0.551	-0.458	-0.502

Por tanto, se propone un modelo empírico para el ajuste del radio máximo de la zona saturada frente al caudal aplicado, la conductividad hidráulica en saturación y la diferencia entre los contenidos de humedad inicial y de saturación del suelo, a través de la siguiente expresión:

$$R_0 = \gamma \sqrt{\frac{q}{k_s \Delta \theta}} \quad (10)$$

Donde γ representa una constante de proporcionalidad empírica y adimensional. El ajuste que se presenta en el epígrafe de resultados (Figura 1) sigue el esquema de esta ecuación, la cual, es común para todos los suelos analizados, independientemente de sus funciones de caracterización o catálogo. Los valores obtenidos para cada uno de los catálogos del factor adimensional γ , junto con su error estadístico, se muestran en la Tabla 3.

Tabla 3 | Resultados del ajuste del modelo empírico, ecuación (10). En la última columna se muestra el coeficiente de correlación lineal obtenido en cada caso. La última fila representa la constante adimensional ligada al modelo analítico propuesto en este artículo al despreciar el término de succión por capilaridad del suelo, ecuación (11).

Función de caracterización	$\gamma \pm \Delta \gamma$ [adim]	[R^2]
Gardner	0.1781 \pm 0.009	[0.97]
Clapp-Hornberger	0.3145 \pm 0.023	[0.94]
Van Genuchten-Mualem.	0.2596 \pm 0.021	[0.89]
Modelo analítico	0.3355	

Observar que, el ajuste es satisfactorio ($R > 0.94$ en todos los casos) a pesar de que la constante de capilaridad macroscópica α , que está relacionada con el tamaño del poro, no aparece en el modelo. Este hecho representa que el efecto de este parámetro sobre el radio límite de la zona saturada es pequeño; por otro lado, como el tamaño del poro también está relacionado con la diferencia de contenidos de humedad $\Delta \theta$, se puede argumentar que parte de la información que representa α ya viene incluida en $\Delta \theta$.

La expresión analítica obtenida para un disco saturado y de radio constante en superficie, cuando el tiempo de aplicación de riego tiende a infinito, ecuación (2), es comparable al régimen estacionario que representa el modelo empírico propuesto en la ecuación (10), si se considera despreciable el término relativo a la succión o capilaridad del suelo (primer sumando) del modelo analítico. Esta aproximación es asumible ya que para tiempos largos de riego, cuando el volumen infiltrado es grande, el efecto gravitatorio predomina sobre la succión. En este contexto, y despejando el radio de la fuente de la ecuación (2), se llega a:

$$R_0 = \frac{1}{2^{3/4} \pi^{1/2}} \sqrt{\frac{q}{\Delta \theta k_s}} \quad (11)$$

Lo que se corresponde a un valor para la constante $\gamma=0.3355$. Advertir que, esta ecuación aproximada es general para cualquier tipo de suelo que pueda ser definido a través de los parámetros propios del modelo analítico propuesto. Según esta última aproximación no existiría una dependencia entre el radio límite de la fuente saturada en régimen estacionario y el índice de

capilaridad macroscópica del suelo, lo que es razonable, ya que α , como la tensión en el frente (τ_f), son coeficientes típicamente asociados a la succión del suelo. En la última fila de la Tabla 3, se ha añadido este valor del coeficiente γ , con objeto de comparar los modelos analítico y empírico. Observar que, curiosamente el valor analítico de γ es muy similar al valor empírico para el ajuste a los suelos caracterizados con las funciones de Clapp y Hornberger, estando ambos valores incluidos dentro del intervalo de error experimental ($\Delta\gamma$) estimado para este coeficiente. Por inspección de la Tabla 3 se concluye que el radio máximo en régimen estacionario que describe el modelo analítico es superior, en cualquier caso, a la predicción del modelo empírico, con independencia del catálogo utilizado.

Resolviendo la ecuación (2) con todos sus términos, y despreciando la solución matemática que dirige a un radio máximo para la zona saturada de signo negativo (sin sentido físico), se llega a la siguiente expresión:

$$R_0 = \frac{1}{4 \Delta \theta \alpha} \left[\sqrt{1 + \frac{4\sqrt{2} \Delta \theta \alpha^2}{\pi k_s} q} - 1 \right] \tag{12}$$

La Figura 4 compara las expresiones (11) y (12) sobre variables adimensionales para el radio y el caudal, a través de los parámetros de referencia siguientes (REF.2):

$$R_0^* = \sqrt{q^*} \tag{11bis}$$

$$R_0^* = \sqrt{1 + q^*} - 1 \tag{12bis}$$

$$R_{ref} = \frac{1}{4 \Delta \theta \alpha} \quad ; \quad q_{ref} = \frac{\pi k_s}{4\sqrt{2} \Delta \theta \alpha^2} \tag{REF.2}$$

El radio que representa la línea discontinua, que corresponde a la ecuación (11bis), es mayor para cualquier valor del caudal al radio que representa la línea continua, ecuación (12bis). Esto es debido a que, al considerar el efecto de la succión la filtración es mayor, y por tanto, el radio límite en régimen estacionario es menor para cualquier valor del caudal aplicado. Observar además que, las diferencias en términos absolutos son mayores para caudales altos (Figura 4b), aunque no superan el 3.2% dentro del rango de estudio. Sin embargo, las diferencias relativas son significativas para valores pequeños del caudal, ya que, el efecto de la succión es importante en este caso, como se puede observar en el diagrama logarítmico (Figura 4a).

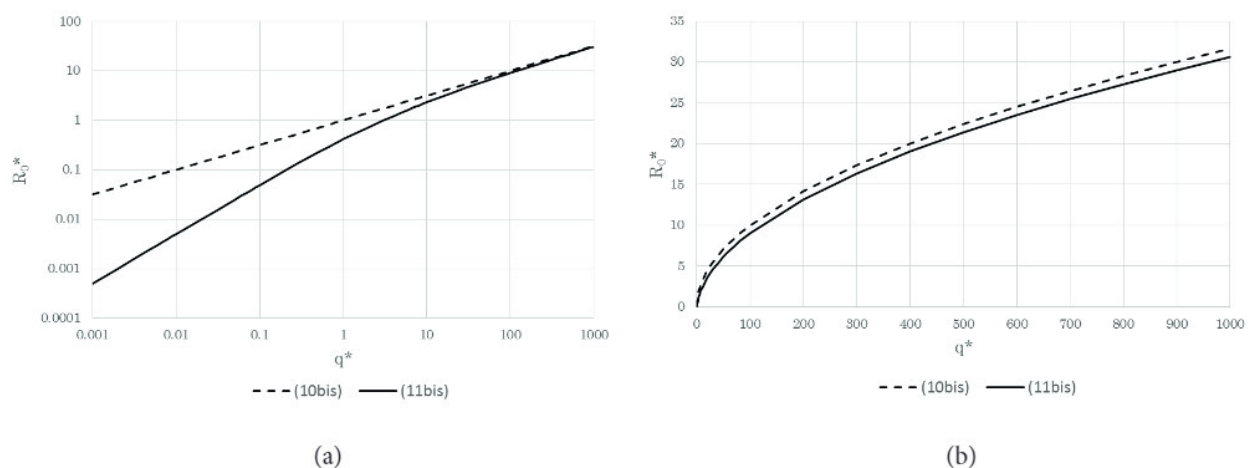


Figura 4 | Comparación de las ecuaciones adimensionales (11bis), línea discontinua, y (12bis), línea continua. (a) Escala logarítmica y (b) escala decimal.

Comparación entre el modelo empírico, analítico y la fórmula de Wooding

Con objeto de comparar la predicción de la fórmula de Wooding con los modelos analítico y empírico propuestos en este trabajo se han realizado algunas simulaciones bajo distintos regímenes de caudal aplicado sobre los suelos que se muestran en la Tabla 4. Se han elegido tres suelos de diferente textura⁴, caracterizados por las funciones de van Genuchten-Mualem, cuyos parámetros fueron estimados con ROSETTA (Schaap *et al.*, 2001), para la proporción textural que se indica en la tabla, y un valor de densidad aparente del suelo de 1.5 g/cm³. El contenido de humedad inicial del suelo, se ha considerado en todos los casos igual a $\theta_0=0.2$ cm³/cm³. El tiempo de riego necesario para alcanzar el radio límite en todos los casos, para estos tres tipos de suelo, fue superior a 12 h con independencia del régimen de caudal aplicado.

Tabla 4 | Tres tipos de suelo distintos caracterizados mediante las funciones de van Genuchten-Mualem.

Tipo	Textura	θ_s (cm ³ /cm ³)	θ_r (cm ³ /cm ³)	k_s (cm/min)	α (cm ⁻¹)	n	θ_0 (cm ³ /cm ³)	τ_f (cm)
Arcilloso	70%-15%-15%	0.4466	0.0989	0.00517	0.019	1.200	0.2	3.67
Franco	15%-33%-52%	0.583	0.053	0.165	0.0136	1.488	0.2	15.91
Arenoso	15%-15%-70%	0.3961	0.0534	0.029	0.0284	1.467	0.2	7.23

La Tabla 5 muestra los resultados obtenidos para el radio límite de la zona saturada (en centímetros) sobre estos suelos y para los cuatro regímenes de riego que se han evaluado ($q=1,6,12,24$ L/h). La última columna muestra el valor del radio máximo de la zona saturada por integración directa de la ecuación de Richards (modelo numérico de simulación). Las otras tres columnas muestran los resultados de los modelos de aproximación, que son objeto de estudio en este artículo. En la última fila, se muestra la desviación promedio de cada uno de los modelos de aproximación frente al resultado de la simulación, el cual, se considera como el valor de referencia, en cada caso. Advertir también que, a pesar de que normalmente el radio máximo de la zona saturada de un suelo franco debería ser mayor que el de un suelo arenoso, el radio máximo del charco para el suelo franco en este caso, es el más pequeño, según la estimación de todos los modelos y los resultados de la simulación, debido a su alto valor de conductividad hidráulica en saturación.

Analizando los resultados que se muestran en la Tabla 5, se observa que la desviación promedio más pequeña respecto a los valores de referencia procede del modelo analítico propuesto (14%), que supera el ajuste del modelo empírico (26%) frente a las simulaciones. Si bien es cierto que, omitiendo un dato (Suelo franco, $q=1$ L/h), el cual, está claramente sobrestimado por la predicción del ajuste empírico, ambos modelos tienen una precisión muy similar. En líneas generales, se observa que, el ajuste empírico tiende a sobrestimar los valores de referencia para los casos de radio máximo pequeño, mientras que el modelo analítico propuesto, sobrestima su predicción para los casos de radio límite más grande. Para el resto de casos, se advierte un muy buen ajuste de estos dos modelos con los datos de referencia.

Por el contrario, el modelo de Wooding subestima sistemáticamente el valor del radio máximo de referencia para todos los suelos y caudal aplicado que se han utilizado en esta prueba. Este modelo de aproximación, es claramente, el que peor ajusta a los valores de referencia (desviación promedio del 48%), lo que seguramente es debido a que el modelo analítico de Wooding se deduce para suelos caracterizados por las funciones del tipo Gardner, mientras que los suelos que se han utilizado en esta prueba han sido caracterizados por funciones del tipo van Genuchten-Mualem. Para los suelos del tipo Gardner, se ha comprobado sin embargo que, el ajuste del modelo de Wooding a las simulaciones que se presentan en el capítulo de resultados es mejor, sobre todo, cuando el radio límite de la zona saturada supera los 10 cm.

⁴ Los suelos arcilloso y arenoso de esta tabla son ficticios, mientras que el suelo franco pertenece al campo de prácticas de la ETSIAAB de la U.P.M. La proporción textural, así como los datos θ_s y k_s , que aparecen en la Tabla 4 de este último suelo fueron obtenidos experimentalmente. Para más información sobre las características de este suelo se puede consultar la bibliografía (del Vigo, 2020).

Tabla 5 | Radio límite (cm). Comparativa entre los tres modelos de estimación del radio límite de la zona saturada, y simulación. El promedio de la desviación relativa entre cada uno de los modelos y simulación (valor de referencia) se muestra en la última fila.

Tipo	q (L/h)	Ec. Wooding	Sol. Analítica	Mod. Empírico	Simulación
Franco	1	0.34	1.34	4.15	1.5
	6	2.01	6.52	10.18	7
	12	3.95	11.16	14.40	14
	24	7.62	18.25	20.36	22
Arcilloso	1	12.85	34.82	29.34	30
	6	51.81	90.30	71.86	80
	12	82.40	129.20	101.63	102
	24	126.96	184.22	143.73	136
Arenoso	1	3.76	10.45	12.39	9
	6	17.58	33.01	30.34	31
	12	29.52	49.25	42.91	48
	24	47.53	72.35	60.69	70
Desviación media		48%	14%	26%	

La comparación entre las ecuaciones analíticas (1) y (2) dirige a conclusiones interesantes. Se observa que, el término de succión por capilaridad de estos dos modelos analíticos es prácticamente el mismo, a diferencia de una constante; si bien al modelo de Wooding, ecuación (1), le precede un factor 4, al modelo analítico propuesto, ecuación (2), le acompaña un factor $\sqrt{2\pi} \cong 4.443$, por lo que el término de succión del modelo propuesto arroja valores que son superiores, en una cantidad en torno a un 11%, a los que predice el modelo de Wooding para el caudal infiltrado. Diversos autores (Pullan y Collins, 1987; Weir, 1987; Warrick, 1992) han reportado que el modelo de Wooding subestima el caudal infiltrado para circunstancias en las que el bulbo (radio de la zona saturada en superficie) es pequeño; esto refuerza el modelo analítico propuesto sobre el de Wooding, ya que este término relativo a la succión capilar del suelo proporciona valores que sistemáticamente son más altos. Recordar además que, es precisamente en las circunstancias en las que el bulbo es pequeño cuando el término de succión por capilaridad puede tener un peso específico relevante frente al término de succión por el efecto gravitatorio, el cual, es predominante cuando el tamaño del bulbo (y por tanto, la masa de agua que contiene) es muy grande.

En segundo lugar, de la comparación del término de filtración relativo al efecto de la fuerza gravitatoria entre las ecuaciones (1) y (2), se observa una diferencia de un factor $2\sqrt{2\Delta\theta}$ que contiene el modelo analítico propuesto, y del que carece el modelo de Wooding. Observar que, para un valor de la diferencia entre los contenidos de humedad inicial y de saturación del suelo igual a $\Delta\theta_c = 0.3535 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$ ambos modelos coinciden. Esto significa que, si la diferencia entre los contenidos de humedad inicial y de saturación del suelo supera el valor crítico $\Delta\theta_c$ el caudal infiltrado que predice el modelo analítico propuesto supera al del modelo de Wooding; en caso contrario, es el modelo de Wooding el que describe un mayor caudal infiltrado debido a este término. Es razonable que, la diferencia entre los contenidos de humedad inicial y de saturación del suelo ($\Delta\theta$) afecte al caudal infiltrado (q), ya que, para tiempos largos de riego, cuando el efecto de la gravedad predomina en el proceso de filtración, cuanto mayor es este parámetro mayor es también la cantidad (y masa) de agua que contiene el bulbo y, por tanto, mayor debe ser la filtración por efecto de la fuerza gravitatoria. Por otro lado, la dependencia del modelo analítico propuesto respecto al parámetro $\Delta\theta$ aumenta su capacidad predictiva, ya que, este parámetro está directamente relacionado con el volumen de la porosidad del medio que es permeable a la entrada de masa y flujo de agua, y por lo tanto, afecta indudablemente al proceso de infiltración.

CONCLUSIONES

Los resultados de simulación conducen a la conclusión de que el radio máximo de la zona saturada en superficie depende principalmente del caudal aplicado, la conductividad hidráulica en saturación, y la diferencia de los contenidos de humedad inicial

y en saturación del suelo. La independencia de la expresión empírica inferida del parámetro α (constante de escala macroscópica de capilaridad) puede suponer una ventaja con respecto a otros modelos de referencia, como el modelo analítico de Wooding, ya que este parámetro es de obtención experimental más compleja.

Como la solución analítica de Wooding fue derivada para suelos caracterizados según las funciones del tipo Gardner, se debe asumir que puede perder validez fuera de este contexto. En las simulaciones realizadas para tres tipos de suelo caracterizados con funciones del tipo van Genuchten-Mualem, se encontró una desviación promedio alta (48%) entre el radio máximo simulado y el radio que predice la aproximación de Wooding. Por su parte, las expresiones inferidas empíricamente que describen la ecuación (10), para cada uno de los tres catálogos, generan valores para el radio máximo que no siguen ningún patrón sistemático de desviación respecto a las simulaciones de referencia; estas desviaciones, además, son aceptables desde un punto de vista experimental.

Por su parte, la expresión analítica propuesta no sigue un patrón de suelo limitado a un tipo de funciones de caracterización, sino que, por el contrario, su aplicación es general para cualquier tipo de suelo sobre el que los parámetros k_s , α y $\Delta\theta$ sean conocidos. En este sentido, una caracterización del suelo en base a estos tres parámetros, como se propone en la bibliografía (del Vigo, 2020), podría ser de interés para seguir avanzando en el conocimiento y estudio de filtración de agua en medios porosos.

Se concluye que, los modelos analítico, ecuación (2), y empírico, ecuación (10), que se introducen en este artículo pueden ser una alternativa de interés para el desarrollo y diseño de los sistemas de riego, en casos como Bresler (1978) o del Vigo et al. (2023), en los que se utiliza el valor del radio máximo de la zona saturada en función del caudal aplicado para establecer el posicionamiento de goteros.

REFERENCIAS

- Amin, M.S.M., Ekhmaj, A.I.M. 2006. DIPAC - Drip Irrigation Water Distribution Pattern Calculator. *7th International Micro-Irrigation Congress*. 10-16 Sept. Kuala Lumpur. Malaysia.
- Ben-Asher, J., Charach, Ch., Zemel, A. 1986. Infiltration and water extraction from trickle source: the effective hemisphere model. *Soil Sci Soc Am J.*, 50, 882-887. <https://doi.org/10.2136/sssaj1986.03615995005000040010x>
- Bresler, E. 1978. Analysis of trickle irrigation with application to design problems. *Irrigation Science*, 1, 3-17. <https://doi.org/10.1007/BF00269003>
- Carnahan, B. 1979. Cálculo numérico. Métodos y aplicaciones. Madrid.
- Carsel, R., Parrish, R. 1988. Developing joint probability of soil water retention characteristics. *Water Resources Research*, 24(5), 755-769. <https://doi.org/10.1029/WR024i005p00755>
- Chu, S.T. 1994. Green-Ampt analysis of wetting patterns for surface emitters. *J. Irrig. Drain E.*, 120(2), 414-421. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9437\(1994\)120:2\(414\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9437(1994)120:2(414))
- Clapp, R.B., Hornberger, G.M. 1978. Empirical equations for soil hydraulic properties. *Water Resources Research*, 14, 601-604. <https://doi.org/10.1029/WR014i004p00601>
- del Vigo, Á., Zubelzu, S., Juana, L. 2019a. Algoritmo para la resolución de la ecuación de Richards en 3-D para riego por goteo: Método, validación y resultados preliminares. *XXXVII Congreso Nacional de Riegos*. Don Benito. Spain. <https://doi.org/10.17398/AERYD.2019.A06>
- del Vigo, Á., Zubelzu, S., Juana, L. 2019b. Study of water infiltration in soil by Richards equations in 3D: summary and methodology validation. *11th World Congress on Water Resources and Environment*. Madrid. Spain. http://ewra.net/pages/EWRA2019_Proceedings.pdf
- del Vigo, Á., Zubelzu, S. y Juana, L. 2019c. Soluciones analíticas aproximadas bajo hipótesis de Green-Ampt desde fuentes semiesférica y circular en superficie. *Jornadas Ingeniería del Agua (J.I.A)*. Toledo. Spain. https://oa.upm.es/65070/1/INVE_MEM_2019_324240.pdf

- del Vigo, Á. 2020. *Simulación del flujo del agua en el suelo en riego por goteo superficial, soluciones analíticas aproximadas, caracterización del suelo y diseño de los riegos*. Tesis doctoral, Universidad Politécnica de Madrid. Madrid. <https://doi.org/10.20868/UPM.thesis.63840>
- del Vigo, Á., Zubeizu, S., Juana, L. 2020. Numerical routine for soil dynamics from trickle irrigation. *Applied Mathematical Modeling*, 83, 371-385. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2020.01.058>
- del Vigo, Á., Zubeizu, S., Juana, L. 2021. Infiltration models and soil characterization for hemispherical and disc sources based on Green-Ampt assumptions. *Journal of Hydrology*, 595, 1259-1266. <https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2021.125966>
- del Vigo, Á., Colimba, J., Juana, L., Rodríguez-Sinobas, L. 2023. Numerical model for the simulation of soil water flow under root-absorption conditions. Application to tomato plant crop. *Irrigation Sciences*, 41, 141-154. <https://doi.org/10.1007/s00271-022-00806-x>
- Gardner, W.R. 1958. Some steady state solutions of unsaturated moisture flow equations with application to evaporation from a water table. *Soil Sci.*, 85, 228-232. <https://doi.org/10.1097/00010694-195804000-00006>
- Kaul, R.K., Michael, A.M. 1982. Moisture front advance under point source of water application. *J. Agric. Eng.*, 19(2), 1-8
- Keyvan, M., Peters, R.T. 2011. Wetting patterns models for drip irrigation: new empirical model. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, 137(8), 530-536. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)IR.1943-4774.0000320](https://doi.org/10.1061/(ASCE)IR.1943-4774.0000320)
- Mualem, Y. 1976. A new model for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated porous media. *Water Resource Journal*, 12, 513. <https://doi.org/10.1029/WR012i003p00513>
- Neuman, S.P. 1976. Wetting front pressure head in the infiltration model of Green and Ampt. *Water Resources Research*, 12, 564-565. <https://doi.org/10.1029/WR012i003p00564>
- Pullan, A.J., Collins, I.F. 1987. Two and three-dimensional steady quasi-linear infiltration from buried and surface cavities using boundary element techniques. *Water Resources Research*, 23(8), 1633-1644. <https://doi.org/10.1029/WR023i008p01633>
- Raats, P.A.C. 1971. Steady infiltration from point sources, cavities and basins. *Soil Sci. Soc. Am. Proc.*, 35, 689-694. <https://doi.org/10.2136/sssaj1971.03615995003500050020x>
- Richards, L.A. 1931. Capillary conduction of liquids in porous medium. *Journal of Applied Physics*, 1, 318-333. <https://doi.org/10.1063/1.1745010>
- Roth, R.L. 1974. Soil moisture distribution and wetting pattern from a point source. *Proceedings of 2nd international drip irrigation congress*. California. EEUU. 246-251.
- Schaap, M.G., Leij, F.J., van Genuchten, M.T. 2001. ROSETTA: a computer program for estimating soil hydraulic parameters with hierarchical pedo-transfer functions. *Journal of Hydrology*, 251, 163-176. [https://doi.org/10.1016/S0022-1694\(01\)00466-8](https://doi.org/10.1016/S0022-1694(01)00466-8)
- Schwartzman, M., Zur, B. 1986. Emitter Spacing and Geometry of Wetted Soil Volume. *J. Irrig. Drain. Eng.*, 112(3), 242-253. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9437\(1986\)112:3\(242\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9437(1986)112:3(242))
- Šimůnek, J., van Genuchten, M., Šejna, M. 2006. The HYDRUS Software Package for Simulating the Two- and Three-Dimensional Movement of Water, Heat, and Multiple Solutes in Variably-Saturated Media, Technical Manual. Version 1.0. University of California Riverside. Riverside, CA, 3PC. Progress, Prague. Czech Republic.
- Van Genuchten, M.T. 1980. A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils. *Soil Science Society of America Journal*, 44(5), 892-898. <https://doi.org/10.2136/sssaj1980.03615995004400050002x>
- Warrick, A.W. 1974. Time-dependent linearized infiltration: I. Point source. *Soil Sci.Soc.Amer. Proc.*, 34, 383. <https://doi.org/10.2136/sssaj1974.03615995003800030008x>
- Warrick, A.W., Lomen, D.O. 1976. Time-dependent linearized infiltration: III. Strip and disc sources. *Soil Sci. Soc. Amer. Proc.*, 40, 639-643. <https://doi.org/10.2136/sssaj1976.03615995004000050014x>

- Warrick, A.W. 1992. Models for disk infiltrometer. *Water Resources Research*, 28, 1319-1327. <https://doi.org/10.1029/92WR00149>
- Weir, G.J. 1987. Steady infiltration from small shallow circular ponds. *Water Resources Research*, 23, 733-736. <https://doi.org/10.1029/WR023i004p00733>
- Wooding, R.A. 1968. Steady infiltration from a shallow circular pond. *Water Resources Research*, 4, 1259-1273. <https://doi.org/10.1029/WR004i006p01259>